Kpi-best

Міністерство освіти та науки України

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”

Факультет інформатики та обчислювальної техніки

Кафедра обчислювальної техніки

Реферат по курсу

“Комп’ютерна логіка” на тему:

“Дивовижні класи”

Виконав: студент 1 курсу групи ІО - 01

Рудницький М.В.

Перевірив: викладач Жабін В.І.

Київ – 2010

**План**

1. Вступ
2. Проблема функціональної повноти систем перемикальних функцій
3. Дивовижні класи
4. Теорема Поста – Яблонського
5. Висновки
6. Список використаної літератури

**Вступ**

В даному рефераті ми розглянемо 5 чудових класів функцій та основні вигоди їх використання. Структура реферату складається з розглядання проблеми функціональної повноти перемикальних функцій та способу її вирішення – використання теореми Поста-Яблонського. Дана теорема оперує 5 дивовижними класами для визначення чи є функція функціонально повною. Кожний чудовий клас розглянутий окремо, що дозволяє краще зрозуміти приклади, наведені в тексті.

**Проблема функціональної повноти систем перемикальних функцій**

Проблема функціональної повноти систем перемикальних функцій є однією з найважливіших в теорії цифрових автоматів. На практиці для побудови складних логічних схем використовують порівняно невеликий набір елементів, тобто функції від багатьох аргументів подаються за допомогою функцій з меншою кількістю аргументів. Це можливо за допомогою закону асоціативності (принципу суперпозиції):

Можливість цього перетворення безпосередньо пов’язана з поняттям функціональної повноти систем перемикальних функцій і показує, що існують такі сукупності перемикальних функцій, за допомогою яких можна представити функцію будь-якої складності. Проектування цифрових автоматів опирається на знання таких сукупностей. Це дуже важливо для розробки комплексів інтегральних мікросхем, з яких можна побудувати довільний цифровий автомат.

Будь-яку сукупність функцій можна вважати класом, які поділяються на функціонально повні і функціонально замкнені.

*Функціонально повним* класом булевих функцій називається сукупність таких булевих функцій , що будь-яка булева функція *f* від будь-якої кількості аргументів може бути записана в вигляді формули через функції цієї сукупності за допомогою принципу суперпозиції. Виходячи з цього визначення до функціонально повної системи потрібно віднести системи та . Доведення цього факту наведемо після розглядання 5 передповних класів.

Водночас *функціонально замкненим* класом називають сукупність функцій, будь-яка суперпозиція яких утворює функцію, що теж належить цьому класу. Серед функціонально замкнених класів виділяють класи особливого типу – передповні або дивовижні, що володіють наступною властивістю. Дивовижний клас *S* не співпадає з множиною *P* всіх можливих булевих функцій, але якщо в нього включити будь-яку булеву функцію, що не входить в *S*, то новий функціонально замкнутий клас буде співпадати з множиною *P*.

**Дивовижні класи**

Дослідження Поста і Яблонського показали, що існує всього 5 дивовижних класів:

* функцій, що зберігають 0 (К0);
* функцій, що зберігають 1 (К1);
* самодвоїстих функцій (КС);
* монотонних функцій (КМ);
* лінійних функцій (КЛ).

Розглянемо дивовижні класи детальніше:

**Клас функцій, що зберігають 0 (К0).** Якщо функція на нулевому наборі перемінних рівна 0, то кажуть, що функція зберігає 0:

Для двох перемінних (табл. 1) такими функціями є f1, f2, f3, f4, f5, f6, f7, f8. Оскільки таблиця істинності для цих функцій в першому рядку значень функції має 0, то є рівно таких функцій.

**Клас функцій, що зберігають 1 (К1).** Якщо функція на одиничному наборі перемінних рівна 1, то кажуть, що функція зберігає 1:

Для двох перемінних (табл. 1) такими функціями є f2, f4, f6, f8, f10, f12, f14, f16. Оскільки таблиця істинності для цих функцій в останньому рядку значень функції має 1, то є рівно таких функцій.

**Клас монотонних функцій (КМ).** Двійковий набір не менше двійкового набору (тобто ) якщо для кожної пари справедливе твердження .

Набори такого типу є порівняними. Набори є непорівнянними в тому сенсі, що для них не виконується жодна з рівностей: та . Наприклад, набір 1011 ≥ 1010, а набори 01101 і 01010 непорівнянні.

Булева функція називається монотонною, якщо для двох будь-яких наборів і таких що має місце нерівність .

Для двох перемінних (табл. 1) такими функціями є f1, f2, f4, f6, f8, f16.

Таблиця 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Функції** | **x1x2** | | | | **Класи** | | | | |
| **00** | **01** | **10** | **11** | **К0** | **К1** | **КМ** | **КЛ** | **КС** |
| f1 | 0 | 0 | 0 | 0 | + |  | + | + |  |
| f2 | 0 | 0 | 0 | 1 | + | + | + |  |  |
| f3 | 0 | 0 | 1 | 0 | + |  |  |  |  |
| f4 | 0 | 0 | 1 | 1 | + | + | + | + | + |
| f5 | 0 | 1 | 0 | 0 | + |  |  |  |  |
| f6 | 0 | 1 | 0 | 1 | + | + | + | + | + |
| f7 | 0 | 1 | 1 | 0 | + |  |  | + |  |
| f8 | 0 | 1 | 1 | 1 | + | + | + |  |  |
| f9 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |  |  |  |  |
| f10 | 1 | 0 | 0 | 1 |  | + |  | + |  |
| f11 | 1 | 0 | 1 | 0 |  |  |  | + | + |
| f12 | 1 | 0 | 1 | 1 |  | + |  |  |  |
| f13 | 1 | 1 | 0 | 0 |  |  |  | + | + |
| f14 | 1 | 1 | 0 | 1 |  | + |  |  |  |
| f15 | 1 | 1 | 1 | 0 |  |  |  |  |  |
| f16 | 1 | 1 | 1 | 1 |  | + | + | + |  |

**Клас лінійних функцій (КЛ).** Для кращого розуміння спочатку розглянемо теорему Жегалкіна:

**Теорема 1.** Будь-яка булева функція може бути представлена многочленом вигляду

, де ki – коефіцієнти , що приймають значення 0 або 1.

Теорема дозволяє представити будь-яку логічну функцію у вигляді поліномів різного степеня, що мають назву поліномів Жегалкіна. Для їх мінімізації було запропоновано використовувати алгебру Ріда-Мюллера, що розширює систему функцій алгебри Жегалкіна, проте робить алгебру надлишковою (в систему вводять функцію НЕ).

До лінійних булевих функцій відносять такі, що можуть бути представлені в вигляді полінома першого степеня (тобто поліном Жегалкіна теж є лінійним):

В формулі (4) , а операція - “сума по mod 2”. Оскільки лінійна функція однозначно визначається заданням коефіцієнтів k0, k1, …, kn, то кількість таких функцій рівна . Для n = 2 лінійними є функції f1, f4, f6, f7, f10, f11, f13, f16 (табл. 1). Розглянемо їх детальніше:

* f1(x1, x2) = 0;
* f4(x1, x2) = x1;
* f6(x1, x2) = x2;
* f7(x1, x2) = x1 x2;
* f10(x1, x2) = 1 x1 = ;
* f11(x1, x2) = 1 x2 = ;
* f13(x1, x2) = 1 x1 x2 = ;
* f16(x1, x2) = 1.

**Клас самодвоїстих функцій (КС).** Функції та є *двоїстими* одна одній, якщо виконується відношення . Такими функціями є f1 та f16, і т.д.

Водночас само двоїстими називають функції, що двоїсті по відношенню до самих себе, тобто справедливе твердження . Отже функція є самодвоїстою, якщо вона приймає протилежні значення на протилежних наборах. Для n = 2 такими є функції f4, f6, f11, f13 (табл. 1).

З визначення само двоїстої функції випливає, що вона повністю визначається своїми значеннями на першій половині рядків таблиці істинності. Саме тому кількість таких функцій рівна .

**Теорема Поста – Яблонського**

Теорема про функціональну повноту систем функцій базується на приналежності функцій передповним класам, тобто для побудови функціонально повної системи необхідно і досить, щоб її функції не містились повністю ні в одному з дивовижних класів.

**Теорема 2**. Щоб система *S* функцій була функціонально повною необхідно і досить, щоб ця система мала в собі хоча б одну функцію, що не зберігає константу 0, хоча б одну функцію, що не зберігає константу 1, хоча б одну несамодвоїсту функцію, хоча б одну немонотонну функцію, хоча б одну нелінійну функцію.

До базису відносяться система функцій , властивості яких вивчені Дж. Булем. Також до базисів відносяться , , базиси, що складаються з функції Шеффера і Пірса. Базиси можуть бути надлишковими і мінімальними.

Базис мінімальний, якщо видалення хоча б однієї з функції перетворить систему функцій алгебри логіки в неповну.

Проблема найпростішого представлення логічних функцій зводиться не лише до вибору базиса, а й форми найбільш економного представлення цих функцій. Якщо порівняти по мінімальності різні форми представлення функцій алгебри логіки, стане ясно, що нормальні форми економніші досконалих нормальних форм. Але, з іншого боку, нормальні форми не дають однозначного представлення функції.

Мінімальна форма представлення функції – форма представлення функції, що має в собі мінімальну кількість термів і змінних в термах (тобто мінімальна форма не допускає ніяких спрощень).

Наприклад функція є мінімальною формою і, навпаки, функція може бути спрощена, якщо до цього виразу застосувати розподільчий закон, тобто . Отже, спрощення складних логічних виразів може бути проведено згідно з основними законами і аксіомами.

Отже, система булевих функцій э ослаблено функціонально повною, якщо містить в собі хоча б одну нелінійну і хоча б одну немонотонну булеву функцію.

Приклад. Перевірити, що функції алгебри Буля є функціонально повною системою функцій

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **a** | **b** | **І** | **АБО** |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

|  |  |
| --- | --- |
| **c** | **НЕ** |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Використаємо 5 дивовижних класів:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **К0** | **К1** | **КС** | **КЛ** | **КМ** |
| **І** | + | + | − | − | + |
| **АБО** | + | + | − | − | + |
| **НЕ** | − | − | + | + | − |

Висновок: це функціонально повна система (− є в кожному стовпці таблиці). Водночас система є надлишковою − та . З неї можна вилучити функцію І чи функцію АБО.

**Висновки**

Ми розглянули 5 дивовижних класів. Найбільшим плюсом їх використання є те, що ми можемо значно спростити логічну схему. Це дозволяє використовувати менше логічних елементів (економічна вигода) та зменшити час проходження сигналу (вигода в плані швидкодії). Тому 5 дивовижних класів лежать в основі прикладної теорії цифрових автоматів.

**Список використаної літератури**

1. Жабін В.І., Жуков І.А., Клименко І.А., Ткаченко В.В. Прикладна теорія цифрових автоматів: Навч. посібник. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 364 с.
2. Савельев А.Я. Прикладная теория цифровых автоматов: Учеб. для вузов по спец. ЭВМ. – М.: Высш. шк., 1987. – 272 с.: ил.
3. Самофалов К.Г., Романкевич А.М., Валуйский В.Н., Каневский Ю.С., Пиневич М.М. Прикладная теория цифровых автоматов. – К.: Высш. шк., 1987. – 375 с.
4. Яблонский С.В. Функции алгебры логики и классы Поста. – М.: Наука, 1966.
5. Конспект лекцій з курсу “Комп’ютерна логіка”. Викладач – Жабін В.І.